PART3　ベクトルの大きさと内積

3 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような実数 t の値を求め，その最小値を求めよ。

Point Pickup

$s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$

である。よって，3 つのベクトルの大きさ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|s\vec{a}+t\vec{b}|$ から，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めることができる。

第 8 講　PART3　確認問題

1　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \theta=\boxed{\text{エ}}$$

[エ の選択肢]

① 30°　② 45°　③ 60°　④ 90°

⑤ 120°　⑥ 135°　⑦ 150°

(2)　$4\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

$$|4\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような実数 t の値を求め，その最小値を求めよ。

$$t=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\text{ のとき　最小値 }\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

PART3　ベクトルの大きさと内積

3 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3) $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような実数 t の値を求め，その最小値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ より

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13 \qquad |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$ より　$3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=13$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{3}{2}}{3\times1}=\frac{1}{2} \qquad 0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ \text{ より } \theta=60^\circ$$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-2\times\dfrac{3}{2}+1^2=7$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=t^2+3t+9=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}$

よって，$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ より，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は

$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき　最小値 $\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

第 8 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-3，ウ：2，エ：⑦，オ：7，
カ：1，キ：2，ク：1，ケ：2

[解説]

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ より

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=7$$

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7 \quad \text{[A]}$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ より

$$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$$

よって　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}}$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{1\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\boldsymbol{\theta=150^\circ}$

(2)　$|4\vec{a}+\vec{b}|^2=16|\vec{a}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ [A]

$$=16\times1^2+8\times\left(-\frac{3}{2}\right)+(\sqrt{3})^2=7$$

$|4\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ より　$\boldsymbol{|4\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}}$

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$ [A]

$$=3t^2-3t+1$$

$$=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ より，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}}$ をとる。

> [A]　s，t を実数とすると，ベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について
> $|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$